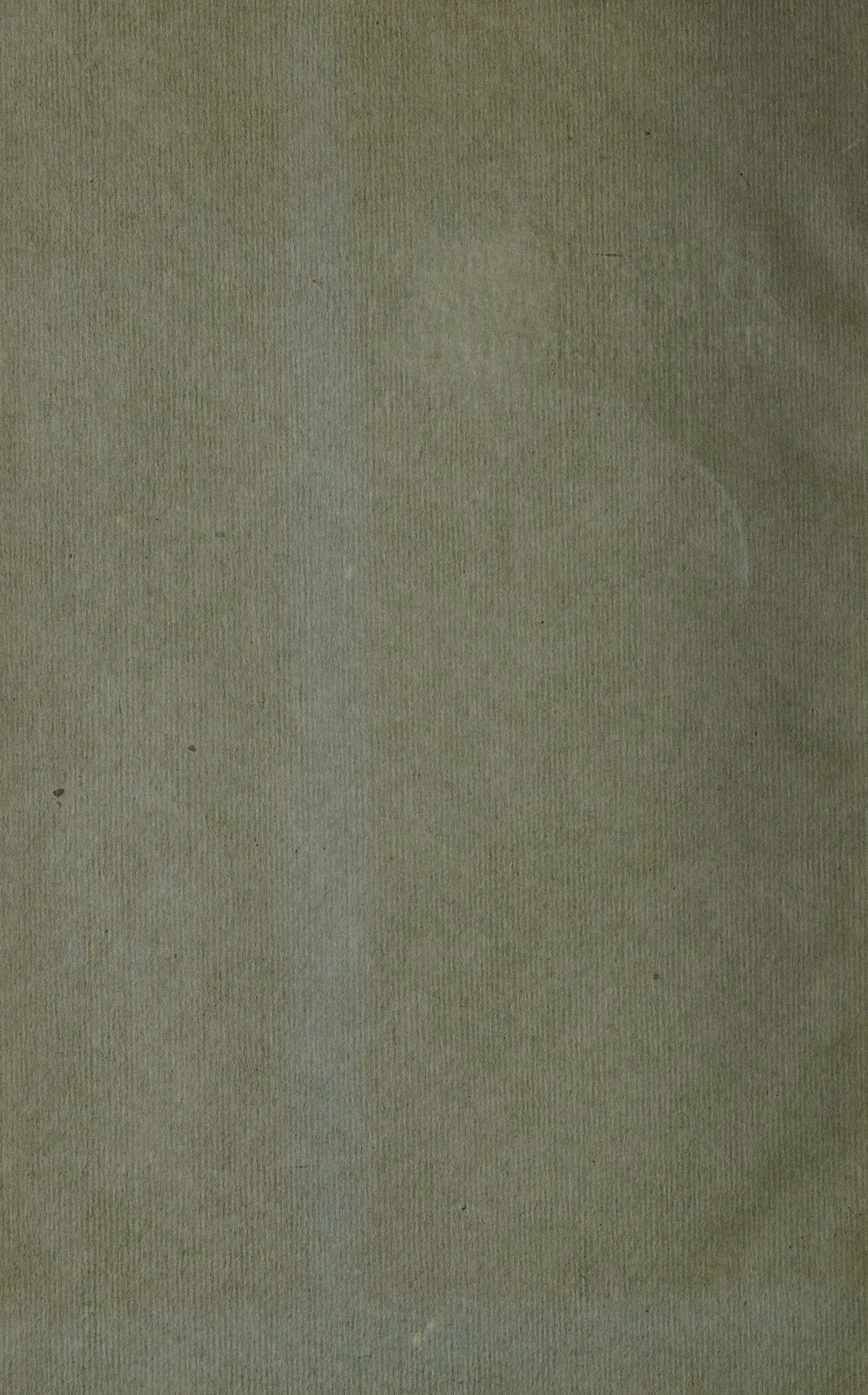
Beiträge zur affinen Geometrie der Flächen zweiten Grades.

Walther Koch.



BEITRÄGE ZUR AFFINEN GEOMETRIE DER FLÄCHEN ZWEITEN GRADES.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

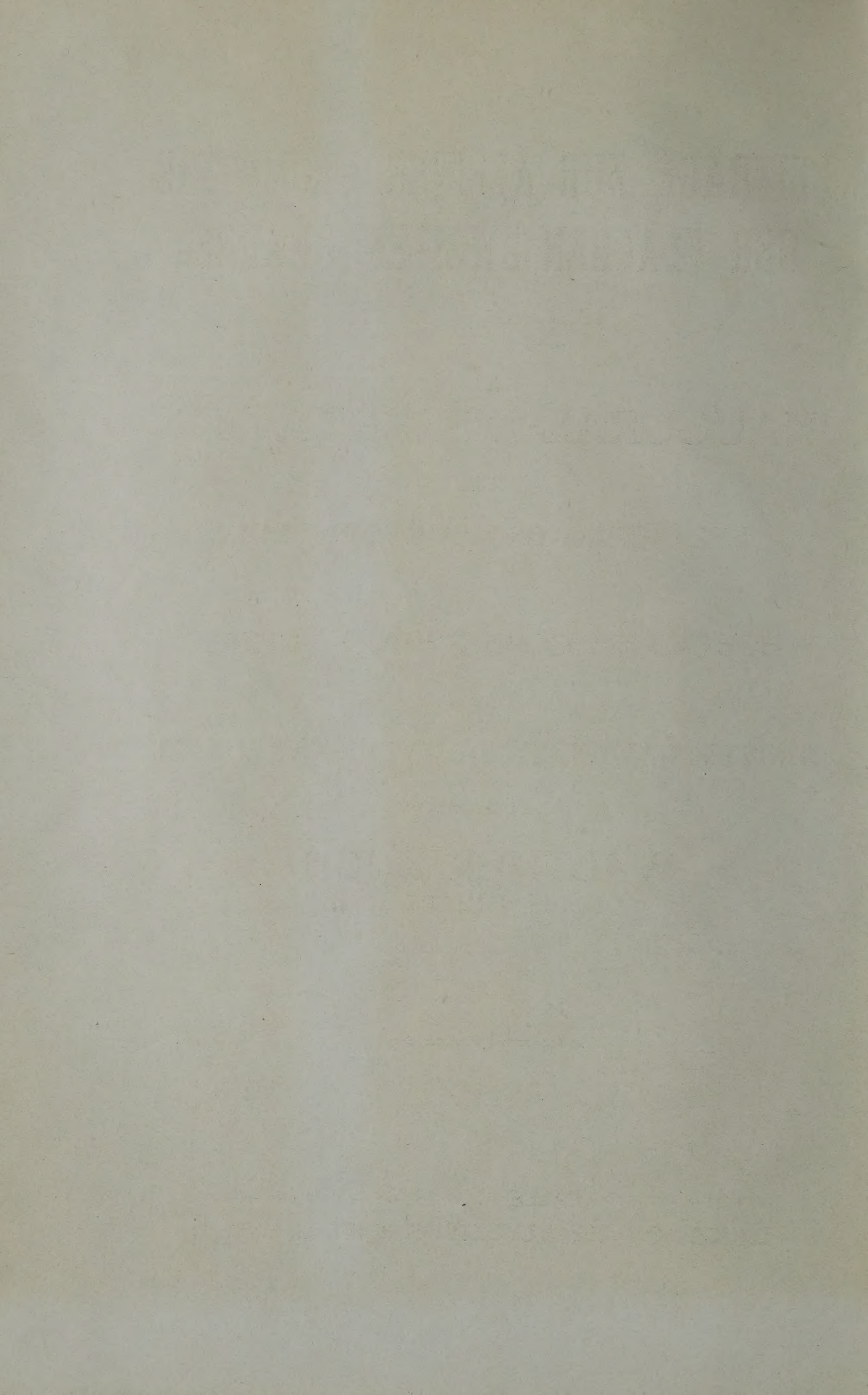
DER

CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL

VORGELEGT VON

WALTHER KOCH
AUS HAMBURG

HALLE A. S. 1910
DRUCK VON GEBAUER-SCHWETSCHKE G. M. B. H.



BEITRÄGE ZUR AFFINEN GEOMETRIE DER FLÄCHEN ZWEITEN GRADES.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL

VORGELEGT VON

WALTHER KOCH

AUS HAMBURG.

HALLE A. S. 1910.

DRUCK VON GEBAUER-SCHWETSCHKE G. M. B. H.

Zum Druck genehmigt.

Dr. C. Neumann,
Dekan.

Den 7. Mai 1910.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

In den geometrischen Werken werden zwar die projektiven Eigenschaften der Gebilde gesondert dargestellt, aber alle anderen pflegen — etwa unter dem Namen „metrische Geometrie“ — zusammen behandelt zu werden. Den Inhalt der projektiven Geometrie bilden diejenigen Eigenschaften der Figuren, die allen projektiven Transformationen gegenüber invariant sind, wie man kurz sagen kann[1]). Aus ihr wird dann durch Einführung des absoluten Kreises die metrische Geometrie hergeleitet.

Wenn man dagegen zunächst nur die absolute (uneigentliche, unendlich ferne) Ebene des Raumes und dann erst den uneigentlichen Kreis in ihr einführt[2]), so gewinnt man die Möglichkeit, die metrische Geometrie in zwei Abstufungen zu zerlegen, die affine und die äquiforme Geometrie. Die affine Geometrie enthält alle Beziehungen, die bei allen affinen, d. h. die uneigentliche Ebene in sich selbst überführenden Transformationen erhalten bleiben, sie führt also die Parallelität ein und fügt zur projektiven Geometrie die

---

[1]) Vgl. F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872 (auch in Mathemat. Annalen Bd. 43). L. Heffter, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Ver. Bd. 12, S. 493ff. und in der Festschrift, Adolf Wüllner gewidmet, Teubner 1905.

[2]) Für die folgenden Gesichtspunkte vgl. L. Heffter und C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. I, Teubner 1905 (angeführt als „H. u. K. I“). Hier ist auch der Kleinsche Gedanke zum erstenmal konsequent durchgeführt.

„Parallelmetrik" hinzu. Die äquiforme Geometrie benutzt außer der Inzidenz und der Parallelität, den elementaren Beziehungen der affinen Geometrie, noch die Orthogonalität, die sich als eine Polarität in bezug auf den uneigentlichen absoluten Kreis erweist, und fügt zur affinen Geometrie die „Orthogonalmetrik" hinzu.

Es geht also bei dieser Auffassungsweise aus der projektiven Geometrie die affine und aus dieser die äquiforme durch bloße Spezialisierung hervor.

Im folgenden sollen — als ein Beitrag zur schärferen Trennung von affiner und äquiformer Geometrie, als sonst üblich — parallelmetrische Eigenschaften der Flächen zweiten Grades bestimmt werden, in ähnlicher Weise, wie es für die Kurven zweiten Grades von L. Heffter und C. Koehler ausgeführt worden ist[1]), und zwar meist auf analytischem Wege.

Viele der nachfolgenden Formeln erscheinen bei oberflächlicher Betrachtung wie altbekannte elementare, erweisen sich aber doch als von ihnen verschieden, wenn man das benutzte Koordinatensystem berücksichtigt. — Einige der über Flächen zweiten Grades aufgestellten Sätze scheinen überhaupt noch nicht ausgesprochen zu sein. Andere wiederum sind in ihren äquiformen Spezialisierungen längst bekannt, und aus diesen könnten auch die hier aufgestellten allgemeineren Sätze durch affine Transformation leicht gewonnen werden, und in einzelnen Fällen ist dies auch geschehen. Es muß aber vom Standpunkte der Methodik aus gerechtfertigt erscheinen, zuerst die allgemeineren affinen, und zwar mit rein affinen Mitteln zu beweisen, zumal die Einfachheit dieser Beweise diesen Weg als den naturgemäßen bestätigt.

---

[1]) H. u. K. I, Kap. X.

I. Koordinaten und Bezeichnungen für die Flächengleichung; Mittelpunktsgleichungen.

1. Koordinaten.

Bei analytischen Darstellungen werden in der metrischen Geometrie des Raumes meist rechtwinklige Cartesische oder Plückersche, seltener die entsprechenden homogenen oder schiefwinklige Koordinaten benutzt. Wo sich schiefwinklige Koordinaten finden, sind sie meist gleichseitig, d. h. sie verwenden auf den drei Achsen dieselbe Längeneinheit. Das hat seine Vorteile, wenn man die Metrik als Ganzes behandelt. Bei der hier gesondert zu behandelnden affinen Geometrie ist aber die Benutzung eines Koordinatensystems geboten, das aus dem allgemeinen projektiven nur dadurch hervorgeht, daß eine Fundamentalebene in die uneigentliche Ebene verlegt wird, ohne daß über die Richtung der Achsen und die Lage des Einheitspunktes noch Festsetzungen getroffen werden[1]).

Im folgenden sollen daher allgemeine Hessesche Punkt- und Ebenenkoordinaten, als für die affine Geometrie naturgemäß, benutzt werden. Die Punktkoordinaten sollen im allgemeinen mit

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad t$$

bezeichnet werden, die Ebenenkoordinaten mit

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad s,$$

wobei die uneigentliche Ebene die Gleichung

[1]) Vgl. hierzu die Anmerkung bei H. u. K. I, S. 244.

$$t = 0$$

bzw. die Koordinaten

$$u_1 : u_2 : u_3 : s = 0 : 0 : 0 : 1$$

hat. Ferner sollen die Punkt- und Ebenenkoordinaten als zusammengehörig und das Koordinatensystem als reell angenommen werden.

Häufig werden auch die aus den Hesseschen Koordinaten bei Ersatz von

$$\frac{x_1}{t}, \quad \frac{x_2}{t}, \quad \frac{x_3}{t}$$

durch bezügl.

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

bzw. von

$$\frac{u_1}{s}, \quad \frac{u_2}{s}, \quad \frac{u_3}{s}$$

durch bzw.

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3$$

hervorgehenden Cartesischen bzw. Plückerschen Koordinaten angewandt werden. Für alle eigentlichen Punkte kann man also kurz $t = 1$, für alle Ebenen, die nicht durch den Nullpunkt gehen, $s = 1$ setzen, wenn man von den homogenen Koordinaten zu den nicht homogenen übergehen will.

Der Punkt mit den Koordinaten

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad t$$

oder

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

werde gelegentlich kurz als der Punkt X bezeichnet und umgekehrt; in entsprechender Weise wird von dem Punkt X' oder der Ebene u gesprochen usw.

2. Bezeichnungen für die Flächengleichung.

Faßt man

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad t$$

als homogene Punktkoordination auf, so stellt

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = f(x, x) \equiv f(x_1, x_2, x_3, t) \\ \quad \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1t \\ \quad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2t \\ \quad + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3t + a_{44}t^2 \end{cases}$$

eine Fläche zweiter Ordnung dar; diese soll gelegentlich kurz „die Fläche f" genannt werden.

Die Koeffizienten der Gleichung (1) seien reell.

Es sei

$$f_i(x) \equiv f_i(x_1, x_2, x_3, t) \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}t$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

und

$$f(x, x') \equiv \Sigma x_i f_i(x')$$
$$(i = 1, 2, 3, 4; \; x_4 \equiv t)$$
$$\equiv \Sigma x'_i f_i(x) \equiv f(x_1, x_2, x_3, t \,|\, x_1', x_2', x_3', t')$$
$$(i = 1, 2, 3, 4; \; x'_4 \equiv t').$$

Sind

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad s$$

homogene Ebenenkoordinaten, so ist

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = \varphi(u, u) \equiv \varphi(u_1, u_2, u_3, s) \\ \quad \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + 2\alpha_{14}u_1s \\ \quad + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + 2\alpha_{24}u_2s \\ \quad + \alpha_{33}u_3^2 + 2\alpha_{34}u_3s + \alpha_{44}s^2 \end{cases}$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Klasse.

Analog wie $f_i(x)$ und $f(x, x')$ seien $\varphi_i(u)$ und $\varphi(u, u')$ gebildet.

Die Gleichung der Fläche zweiter Klasse wird meist in der Form

$$(3) \quad \begin{cases} 0 = F(u, u) \equiv F(u_1, u_2, u_3, s) \\ \quad \equiv A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{14}u_1s \\ \quad + A_{22}u_2^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{24}u_2u_4 \\ \quad + A_{33}u_3^2 + 2A_{34}u_3u_4 + A_{44}s^2 \end{cases}$$

angenommen werden; hierin sollen die A_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ bez. die Adjunkten der Elemente a_{ik} in der Determinante von f

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

sein; F ist also die adjungierte Fläche zu f. F und f sind identisch, wenn A von Null verschieden ist, was im folgenden im allgemeinen vorausgesetzt wird; f und F sollen also im allgemeinen nicht entartete Flächen sein.

3. Mittelpunktsgleichungen.

Um parallelmetrische Eigenschaften der Flächen zweiten Grades zu erhalten, muß man projektive Sätze, die von ihnen gelten, durch Auszeichnung der uneigentlichen Ebene in affiner Weise spezialisieren.

So gelangt man zunächst zu einer parallelmetrischen Einteilung der Flächen, indem man ihren uneigentlichen Kegelschnitt in projektiver Hinsicht untersucht; dieser besteht bei den Flächen zweiter Ordnung aus den der Fläche mit der uneigentlichen Ebene gemeinsamen Punkten, bei den Flächen zweiter Klasse aus den Tangenten der Fläche, die in der uneigentlichen Ebene liegen. Die so gewonnene parallelmetrische Klassifikation der Flächen liefert mit der projektiven zusammen ihre affine Einteilung[1]).

Weiter kommt man zum Begriff des Mittelpunktes einer Fläche als des Poles der uneigentlichen Ebene und zu den Begriffen Durchmesser und Diametralebene als der Polaren uneigentlicher Geraden und der Polarebenen uneigentlicher Punkte.

Die Gleichung der Fläche kann nun vereinfacht werden; man macht zu dem Zwecke bei den Flächen mit eigentlichem Mittelpunkt, den „Mittelpunktsflächen“, diesen

---

[1]) L. Hefftер im Journal f. r. u. a. Mathematik, Band 126 (1903), S. 83.

zum Anfangspunkt des Koordinatensystems, bei den Flächen mit uneigentlichem Mittelpunkt, den Paraboloiden, diesen Punkt zu einer der uneigentlichen Ecken des Koordinatentetraeders. Die so entstehende Gleichung heißt Mittelpunktsgleichung.

Es sei eine Mittelpunktsfläche durch die Gleichung (3) gegeben; ist diese schon eine Mittelpunktsgleichung, so müssen

$$A_{14}, \quad A_{24}, \quad A_{34}$$

und in (1) dementsprechend

$$a_{14}, \quad a_{24}, \quad a_{34}$$

verschwinden. Die Gleichungen lauten also

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\ + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 \\ + a_{44}t^2 = 0 \end{cases}$$

und

$$(5) \qquad \begin{cases} A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 \\ + A_{22}u_2^2 + 2A_{23}u_2u_3 + A_{33}u_3^2 \\ + A_{44}s^2 = 0. \end{cases}$$

Ist (1), also auch (3), noch keine Mittelpunktsgleichung, so erhält man diese durch die bekannte Transformation

$$(6) \qquad \begin{cases} x'_i = x_i - \dfrac{A_{i4}t}{A_{44}} \quad (i = 1, 2, 3) \\ t' = t \end{cases}$$

in der Form

$$(7) \qquad 0 = f(x, x) \equiv f(x'_1, x'_2, x'_3, 0) + \frac{A}{A_{44}} t'^2.$$

Es stelle jetzt (3) ein Paraboloid dar. Nimmt man an, (3) sei schon eine Mittelpunktsgleichung, und es falle etwa der Fundamentalpunkt 0, 0, 1, 0 mit dem Mittelpunkte zusammen, so müssen außer A_{44} auch

$$A_{41} \quad \text{und} \quad A_{42}$$

verschwinden. Daraus folgt für dieselbe Fläche in der Form (1)

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0.$$

Die Gleichungen lauten daher:

$$(8)\quad \begin{cases} A_{11}u_1{}^2 + A_{22}u_2{}^2 + A_{33}u_3{}^2 \\ + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 \\ + 2A_{34}u_3s = 0 \end{cases}$$

und

$$(9)\quad \begin{cases} a_{11}x_1{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{22}x_2{}^2 \\ + 2a_{14}x_1t + 2a_{24}x_2t + 2a_{34}x_3t \\ + a_{44}t^2 = 0. \end{cases}$$

Ist (1) noch keine Mittelpunktsgleichung, und ist etwa $A_{43} \neq 0$, so lasse man den Mittelpunkt mit dem neuen Fundamentalpunkt 0, 0, 1, 0 zusammenfallen; man erhält dann

$$(10)\qquad 0 = f(x'_1, x'_2, 0, t') + 2\frac{A}{A_{34}}\,x'_3t'.$$

II. Parallelmetrische Eigenschaften der Mittelpunktsflächen.

1. Der Asymptotenkegel.

Aus der Polarentheorie der Flächen zweiten Grades erhält man durch affine Spezialisierung die Sätze über konjugierte Richtungen von Geraden und Stellungen von Ebenen, über konjugierte Durchmesser und Diametralebenen usw., indem man das Bündel des Mittelpunktes betrachtet. Man kann sie aber auch erhalten, indem man die Polareigenschaften ihrer uneigentlichen Elemente, Punkte und Geraden in der uneigentlichen Ebene, in bezug auf den uneigentlichen Kegelschnitt der Fläche benutzt. Aus der Beschaffenheit dieses Kegelschnittes folgt, daß bei den Ellipsoiden, Hyperboloiden, Paraboloiden das Gebilde der sich selbst entsprechenden Elemente, der Asymptotenkegel, bzw. imaginär und nicht entartet, reell und nicht entartet, entartet ist.

Fortan soll zunächst immer von Mittelpunktsflächen die Rede sein.

Der uneigentliche Kegelschnitt der Fläche (1) ist

$$f(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, t = 0; \tag{11}$$

zwei Gerade mit den uneigentlichen Punkten

$$x_1, x_2, x_3, 0$$

und

$$x'_1, x'_2, x'_3, 0$$

haben konjugierte Richtung in bezug auf die Fläche, wenn

$$f(x_1, x_2, x_3, 0 \mid x'_1, x'_2, x'_3, 0) = 0 \tag{12}$$

ist.

Ist die Fläche durch eine Mittelpunktsgleichung (7) gegeben, so sind zwei Durchmesser mit den uneigentlichen Punkten

$$x'_1, x'_2, x'_3, 0$$

und

$$y'_1, y'_2, y'_3, 0$$

konjugiert, wenn

$$f(x'_1, x'_2, x'_3, 0 \mid y'_1, y'_2, y'_3, 0) = 0 \tag{13}$$

ist. Nimmt man hierin x'_1, x'_2, x'_3 als variabel an, so ist (13) die Gleichung der Diametralebene, die zu dem Durchmesser durch $y'_1, y'_2, y'_3, 0$ konjugiert ist. Der Asymptotenkegel ist durch die Gleichung

$$f(x'_1, x'_2, x'_3, 0 \mid x'_1, x'_2, x'_3, 0) = 0 \tag{14}$$

darzustellen. Man sieht auch unmittelbar, daß (14) die Gleichung eines Kegels ist, der durch den uneigentlichen Kegelschnitt

$$f(x'_1, x'_2, x'_3, 0) = 0, \; t' = 0$$

hindurchgeht und dessen Spitze im Mittelpunkt liegt.

Man braucht also in der Mittelpunktsgleichung einer Mittelpunktsfläche nur die vierte Koordinate gleich Null zu setzen, um den Asymptotenkegel zu erhalten.

Ist die Mittelpunktsfläche durch ihre allgemeine Gleichung (1) gegeben, so führe man die Transformation (6) rückwärts durch; aus (7) folgt

$$f(x'_1, x'_2, x'_3, 0) \equiv f(x, x) - \frac{A}{A_{44}} t'^2$$

oder wegen (6)

$$f(x'_1, x'_2, x'_3, 0) \equiv f(x, x) - \frac{A}{A_{44}} t^2.$$

Also ist

$$f(x, x) - \frac{A}{A_{44}} t^2 = 0 \tag{15}$$

der Asymptotenkegel von $f(x, x) = 0$.

Die Gleichung (4) stelle jetzt ein Hyperboloid dar; da sein Asymptotenkegel reell ist, kann man drei seiner Geraden als Koordinatenachsen einführen; heißen diese Koordinaten

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau,$$

so ergibt sich aus (14), daß die Koffizienten von $\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2$ verschwinden müssen. Der Asymptotenkegel bekommt die Gleichung

$$b_{23}\xi_2\xi_3 + b_{31}\xi_3\xi_1 + b_{12}\xi_1\xi_2 = 0, \tag{16}$$

das Hyperboloid die Gleichung

$$2b_{23}\xi_2\xi_3 + 2b_{31}\xi_3\xi_1 + 2b_{12}\xi_1\xi_2 + b_{44}\tau^2 = 0, \tag{17}$$

wenn b_{23}, b_{31}, b_{12} gewisse Koeffizienten sind. Dividiert man (17) durch $-b_{44}$ und ändert die Lage des Einheitspunktes in geeigneter Weise, und damit die Einheitsstrecken auf den drei Achsen, was bei allgemeinen Hesseschen Koordinaten ja möglich ist, so kann man die Gleichung des Hyperboloids auf die Form

$$\varepsilon_1\xi_2\xi_3 + \varepsilon_2\xi_3\xi_1 + \varepsilon_3\xi_1\xi_2 = \tau^2 \tag{18}$$

bringen; hier wie allgemein im folgenden sollen die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ unabhängig voneinander gleich $+1$ oder gleich -1 sein.

(18) stellt ein einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid dar, je nachdem

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 < 0 \quad \text{oder} \quad > 0$$

ist. Der Asymptotenkegel wird

$$\varepsilon_1\xi_2\xi_3 + \varepsilon_2\xi_3\xi_1 + \varepsilon_3\xi_1\xi_2 = 0. \tag{19}$$

Die Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten lautet, auf dasselbe System bezogen,

$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 s^2 \\ -2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_1 u_2 u_3 + \varepsilon_2 u_3 u_1 + \varepsilon_3 u_1 u_2) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

2. Durchmessergleichung und affine Normalform der Gleichung der Flächen.

Wird die Gleichung einer Fläche zweiten Grades auf ein Polartetraeder als Koordinatentetraeder bezogen, so enthält sie nur die Quadrate der Koordinaten. Bei den Mittelpunktsflächen wählt man speziell ein solches, das die uneigentliche Ebene als Seite enthält, dessen eigentliche Ecke also der Mittelpunkt ist. Die Koordinatenachsen sind dann drei konjugierte Durchmesser, und die Gleichung heißt kurz „Durchmessergleichung". Sie hat die Form

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dt^2 = 0$$

oder

$$\varepsilon_1 \frac{x_1^2}{a_1^2} + \varepsilon_2 \frac{x_2^2}{a_2^2} + \varepsilon_3 \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \tag{21}$$

wo a, b, c, d und ebenso a_1, a_2, a_3 beliebige reelle Konstanten sind. (21) stellt bekanntlich ein imaginäres bzw. reelles Ellipsoid dar, wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sämtlich negativ bzw. positiv sind, dagegen ein einschaliges bzw. zweischaliges Hyperboloid, wenn von den Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, zwei positiv und eine negativ bzw. eine positiv und zwei negativ sind.

Zwei Flächen, bei denen die linken Seiten ihrer Durchmessergleichung (21) entgegengesetzt gleich sind, heißen konjugiert; sie haben denselben Asymptotenkegel.

Nimmt man eine Koordinatentransformation vor, indem man den Einheitspunkt verlegt, so kann man erreichen, daß die Gleichung eine der Formen

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 1 \tag{22}$$

erhält. Diese Formen mögen die affinen Normalformen der Gleichungen der Mittelpunktsflächen heißen.

Der Asymptotenkegel bekommt dann die Gleichung

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 0. \tag{23}$$

Für die Fläche zweiter Klasse ergibt sich die Durchmessergleichung

(24) $$\varepsilon_1 a_1{}^2 u_1{}^2 + \varepsilon_2 a_2{}^2 u_2{}^2 + \varepsilon_3 a_3{}^2 u_3{}^2 = 1;$$

ihre Gleichung in der affinen Normalform lautet

(25) $$\varepsilon_1 u_1{}^2 + \varepsilon_2 u_2{}^2 + \varepsilon_3 u_3{}^2 = 1.$$

Die affinen Normalformen kann man im allgemeinen nur bei Anwendung von ungleichseitigen schiefwinkligen Koordinaten erhalten.

Die Flächen (1) und

$$f(x_1, x_2, x_3, t) - \frac{2A}{A_{44}} t^2 = 0$$

haben denselben Asymptotenkegel; er ist nämlich im ersten Falle

$$f(x_1, x_2, x_3, t) - \frac{A}{A_{44}} t^2 = 0,$$

im zweiten

$$0 = \left[f(x_1, x_2, x_3, t) - \frac{2A}{A_{44}} t^2\right]$$

$$- \frac{1}{A_{44}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \dfrac{2A}{A_{44}} \end{vmatrix} t^2$$

$$\equiv f(x_1, x_2, x_3, t) - \frac{A}{A_{44}} t^2.$$

Die beiden Flächen sind aber auch konjugiert; denn ihre Mittelpunktsgleichungen und folglich auch ihre Durchmessergleichungen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des konstanten Gliedes.

3. Tripel konjugierter Durchmesser.

Von drei konjugierten reellen Durchmessern schneidet beim imaginären Ellipsoid keiner, beim reellen Ellipsoid alle, beim einschaligen Hyperboloid zwei, beim zweischaligen einer reell. Nennt man Halbmesser auf konjugierten Durchmessern konjugierte Halbmesser, so sind diese bzw. alle imaginär, alle reell, zwei von ihnen oder einer reell.

Da dieselben Durchmesser auch in bezug auf die konjugierte Fläche konjugiert sind, kann man von drei reellen Halbmessern sprechen, die konjugiert sind in bezug auf entweder die zu einer Fläche konjugierte Fläche, oder die Fläche selbst, oder das System zweier konjugierten Flächen.

Es seien X, Y, Z drei reelle oder imaginäre Endpunkte von konjugierten Halbmessern einer Mittelpunktsfläche (22)

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 1.$$

Es ist dann

$$\text{(26a)} \quad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \varepsilon_1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \varepsilon_2 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = \varepsilon_3 \end{cases}$$

und

$$\text{(27)} \quad \begin{cases} x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 = 0 \\ x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 = 0 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \end{cases}$$

Soll nur von reellen Endpunkten der Halbmesser die Rede sein, so gilt für das reelle Ellipsoid das Obige unverändert.

Beim imaginären Ellipsoid ist (26a) zu ersetzen durch

$$\text{(26b)} \quad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = -\varepsilon_1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = -\varepsilon_2 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = -\varepsilon_3, \end{cases}$$

beim einschaligen Hyperboloid durch

$$\text{(26c)} \quad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = \varepsilon_1 \\ x_2^2 + y_2^2 - z_2^2 = \varepsilon_2 \\ x_3^2 + y_3^2 - z_3^2 = \varepsilon_3, \end{cases}$$

wenn X und Y auf der Fläche selbst liegen; beim zweischaligen Hyperboloid gilt außer (27), wenn X auf ihm selbst liegt,

$$\text{(26d)} \quad \begin{cases} x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 = \varepsilon_1 \\ x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = \varepsilon_2 \\ x_3^2 - y_3^2 - z_3^2 = \varepsilon_3. \end{cases}$$

4. Innere und äußere Punkte des Raumes in bezug auf eine Fläche zweiten Grades.

Die reellen Punkte der Ebene lassen sich schon projektiv in „innere“ und „äußere“ in bezug auf einen reellen nicht entarteten Kegelschnitt trennen; als „innere“ Punkte werden diejenigen bezeichnet, bei welchen alle durch sie gehenden reellen Geraden die Kurve reell schneiden, als „äußere“ die, bei denen dieses nicht bei allen diesen Geraden der Fall ist; die inneren Punkte tragen ein imaginäres, die äußeren ein reelles Tangentenpaar der Kurve.

Im Raum ist projektiv eine ähnliche Scheidung in bezug auf eine Fläche zweiten Grades nur bei den nicht geradlinigen Flächen ausführbar. Bei den geradlinigen Flächen dagegen lassen sich z. B. durch keinen reellen Punkt nur reell schneidende reelle Gerade legen, und aus jedem reellen Punkt lassen sich reelle Tangenten ziehen.

Man kommt jedoch bei den Hyperboloiden in folgender Weise zu einer affinen Trennung der reellen Punkte des Raumes — von diesen soll zunächst immer die Rede sein — in zwei Klassen, die mit der erwähnten projektiven für das zweischalige Hyperboloid identisch ist.

Beim zweischaligen Hyperboloid kann man alle, also auch die uneigentlichen Punkte, projektiv in innere und äußere scheiden; dasselbe bewirkt aber auch der uneigentliche Kegelschnitt der Fläche für die Punkte der uneigentlichen Ebene, d. h. eben die uneigentlichen Punkte des Raumes, und dies gilt offenbar auch für das einschalige Hyperboloid.

Zunächst sind also alle reellen uneigentlichen, nicht auf dem Hyperboloid liegenden Punkte in äußere und innere geschieden. Das analytische Kriterium hierfür ist nach H. u. K. I, S. 293 (50a) sofort anzugeben. Ist

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \tag{28}$$

die Gleichung des Hyperboloids, so ist ein reeller uneigentlicher Punkt $x_1, x_2, x_3, 0$ ein äußerer oder innerer, je nachdem

$$(29) \qquad A_{44} f(x_1, x_2, x_3, 0) < 0 \quad \text{oder} \quad > 0$$

ist.

Wir nennen nun einen beliebigen eigentlichen reellen Punkt einen äußeren oder inneren in bezug auf das Hyperboloid, je nachdem er von den uneigentlichen äußeren oder inneren Punkten durch die Fläche nicht getrennt wird.

Betrachten wir den Ausdruck

$$(30) \qquad A_{44} f(x_1, x_2, x_3, t),$$

dessen Vorzeichen die uneigentlichen Punkte in äußere und innere schied. Ändert sich hierin der Punkt x_1, x_2, x_3, t stetig, so kann bewirkt werden, daß auch seine Koordinaten sich nur stetig ändern und nie unendlich werden, indem man zwischen ihnen, weil sie homogen sind, noch z. B. die Relation

$$(31) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + t^2 = 1$$

festhalten kann. Dann ändert sich auch t nur stetig und wird nie unendlich. Folglich kann (30) sein Vorzeichen nur ändern, wenn $f = 0$ wird, d. h. wenn der Punkt die Fläche passiert. Demnach ist für alle äußeren Punkte X des Raumes

$$(32) \qquad A_{44} f(x, x) < 0,$$

und für alle inneren Punkte X des Raumes

$$(33) \qquad A_{44} f(x, x) > 0.$$

Oder man hat das Resultat:

Der reelle eigentliche Punkt X ist ein innerer oder äußerer Punkt in bezug auf das Hyperboloid $f(x, x) = 0$, je nachdem

$$(34) \qquad A_{44} f(x, x) > 0 \quad \text{oder} \quad < 0$$

ist.

Für den reellen Kegel (im engeren Sinne) kann man die entsprechenden Definitionen und Sätze geben; die analytischen Ausdrücke erfahren nur die Veränderung, daß überall $A = 0$ anzunehmen ist.

Nun ist ferner

$$(35)\qquad \begin{cases} f_1(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) = 0 \\ f_2(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) = 0 \\ f_3(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) = 0 \\ f_4(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) = A, \end{cases}$$

$$(36)\qquad f(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) = A_{44}A.$$

Also hat $A_{44}f(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44})$ das Vorzeichen von A. Da beim einschaligen Hyperboloid $A > 0$, beim zweischaligen $A < 0$ ist, so folgt:

Der Mittelpunkt des einschaligen Hyperboloids ist ein innerer, der des zweischaligen ein äußerer Punkt.

Reelle Durchmesser von Hyperboloiden, deren uneigentliche Punkte innere (äußere) Punkte sind, sollen innere (äußere) Durchmesser heißen. Aus dem vorigen Satze ergibt sich, daß beim zweischaligen (einschaligen) Hyperboloid die inneren (äußeren) Durchmesser die Fläche reell, die äußeren (inneren) die Fläche imaginär schneiden. Nennt man Halbmesser auf inneren oder äußeren Durchmessern innere oder äußere Halbmesser, so kann man sagen:

Beim zweischaligen Hyperboloid sind die inneren Halbmesser reell, die äußeren imaginär, beim einschaligen die äußeren reell und die inneren imaginär.

Eine Gerade mit innerem (äußerem) uneigentlichen Punkte möge Gerade von innerer (äußerer) Richtung (in bezug auf eine Fläche usw.) heißen, jede auf ihr liegende Strecke kurz Strecke von innerer (äußerer) Richtung.

Die Tangenten eines Hyperboloids von einem inneren (äußeren) Punkte haben innere (äußere) Richtung.

5. Das Streckenverhältnis; Mittelpunktsflächen als Eichflächen.

Der Abstand zweier Punkte, gemessen durch eine irgendwo liegende Maßstrecke, ist bei äquiformen Transformationen konstant; sein Wert hängt nur von den beiden Endpunkten der Strecke ab.

In der projektiven Geometrie kann man etwas Ähnliches erreichen, indem man das Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden, das ja dort invariant ist, in folgender Weise spezialisiert:

Man definiert eine Fläche zweiten Grades als Eichfläche, indem man festsetzt, daß das Doppelverhältnis zweier Punkte und der beiden Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit der Fläche als eine Beziehung zwischen den beiden Punkten aufzufassen sei. Man kann die Erwähnung der beiden Schnittpunkte dann auch unterlassen, solange man nur mit Punkten auf dieser einen Geraden zu tun hat. Hat man mit verschiedenen Geraden zu tun, so muß man natürlich ihre Schnittpunkte mit der Fläche in Betracht ziehen.

In der affinen Geometrie kann man einen Schritt weiter gehen: nach Definition des Begriffs der Strecke kann man den Begriff „Eichstrecke" einführen, und zwar kann man eine Eichstrecke als Maß nicht nur für alle Strecken auf einer Geraden, sondern für alle Strecken auf allen Geraden von gleicher Richtung benutzen.

In der äquiformen Geometrie endlich ist es möglich, für alle Strecken überhaupt denselben Maßstab anzuwenden.

Der vorstehende Gedanke möge, soweit er die affine Geometrie betrifft, weiter verfolgt werden.

Zunächst soll für das Verhältnis zweier parallelen Strecken ein analytischer Ausdruck gesucht werden.

Als Doppelverhältnis von zwei Ebenen und zwei Punkten im Raum werde das Dopperverhältnis der beiden Punkte und der Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit den beiden Ebenen, das gleich dem Doppel-

verhältnis der beiden Ebenen und der ihre Schnittlinie mit den beiden Punkten verbindenden Ebenen ist, definiert. Es sei also das Doppelverhältnis

$$(XYuv) = (XYUV), \tag{37}$$

wenn X und Y zwei Punkte, u und v zwei Ebenen und U und V die Schnittpunkte der Geraden XY mit u bzw. v sind. XY ist in allgemeinen Tetraederkoordinaten darstellbar durch

$$z_i = x_i - \lambda y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{38}$$

wenn mit Z allgemein ein Punkt von XY und mit λ ein variabeler Parameter bezeichnet wird. Sind λ_u und λ_v die zu U und V gehörenden Werte von λ, so ist

$$(XYUV) = \frac{\lambda_u}{\lambda_v}. \tag{39}$$

Nun ist

$$\left.\begin{aligned} \sum_i u_i(x_i - \lambda_u y_i) &\equiv 0 \\ \sum_i v_i(x_i - \lambda_v y_i) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$\lambda_u = \frac{\sum u_i x_i}{\sum u_i y_i},$$

$$\lambda_v = \frac{\sum v_i x_i}{\sum v_i y_i},$$

$$\frac{\lambda_u}{\lambda_v} = \frac{\sum u_i x_i \sum v_i y_i}{\sum u_i y_i \sum v_i x_i}.$$

$$(XYuv) = \frac{\sum u_i x_i \sum v_i y_i}{\sum u_i y_i \sum v_i x_i}. \tag{40}$$

Ist v die uneigentliche Ebene, so erhält man aus dem Doppelverhältnis das Abstandsverhältnis (XY, u); in Cartesischen Koordinaten hat man also

$$(XY, u) = \frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + s}{u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + s}. \tag{41}$$

Das Streckenverhältnis zweier parallelen Strecken AB und CD läßt sich auffassen als das Abstandsver-

hältnis z. B. von A und C in bezug auf eine beliebige Ebene u durch B und D, wenn das Verhältnis paralleler Strecken bei gleichem Richtungssinn positiv, bei verschiedenem negativ gerechnet wird. Es ist also

$$\frac{AB}{CD} = (AC, u). \tag{42}$$

u darf noch durch einen beliebigen Punkt — er heiße X — gehen, der nicht mit der Ebene $ABCD$ zusammenfällt; es sei dies der Fall; dann gilt

$$\begin{cases} u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 + s = 0 \\ u_1 d_1 + u_2 d_2 + u_3 d_3 + s = 0 \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + st = 0, \end{cases}$$

$$u_1 : u_2 : u_3 : s = \begin{vmatrix} b_2 b_3 1 \\ d_2 d_3 1 \\ x_2 x_3 t \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 b_3 1 \\ d_1 d_3 1 \\ x_1 x_3 t \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 b_2 1 \\ d_1 d_2 1 \\ x_1 x_2 t \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 b_2 b_3 \\ d_1 d_2 d_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{vmatrix},$$

$$\frac{AB}{CD} = (AC, u) = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 1 \\ b_1 b_2 b_3 1 \\ d_1 d_2 d_3 1 \\ x_1 x_2 x_3 t \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 c_2 c_3 1 \\ b_1 b_2 b_3 1 \\ d_1 d_2 d_3 1 \\ x_1 x_2 x_3 t \end{vmatrix}. \tag{43}$$

Nun muß aber dieses Abstandsverhältnis von dem Punkte X unabhängig sein. In der Tat ist wegen der Parallelität von AB und CD

$$\begin{cases} c_1 - d_1 = \lambda(a_1 - b_1), \\ c_2 - d_2 = \lambda(a_2 - b_2), \\ c_3 - d_3 = \lambda(a_3 - b_3), \end{cases} \tag{44}$$

und hieraus und der letzten Gleichung folgt leicht:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{a_1 - b_1}{c_1 - d_1} = \frac{a_2 - b_2}{c_2 - d_2} = \frac{a_3 - b_3}{c_3 - d_3}, \tag{45}$$

wo mindestens in einem der drei Quotienten nicht Zähler und Nenner Null sind, da sonst $A = B$ und $C = D$ wäre.

Für AB werde jetzt eine zu messende Strecke $X'X''$, für CD folgendermaßen eine Eichstrecke gewählt:

Gegeben sei eine Mittelpunktsfläche durch ihre Gleichung in der Normalform (22)

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 1;$$

sie soll als Eichfläche bezeichnet werden. Ihr Mittelpunkt sei O, und OE_g, einer der beiden Halbmesser, die der Geraden $g \equiv X'X''$ parallel sind, diene als Eichstrecke für $X'X''$. Die Koordinaten x_1, x_2, x_3 von E_g genügen also der Gleichung

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 1, \tag{46}$$

außerdem wegen der Parallelität von OE_g und g den Gleichungen

$$x_i = \lambda(x'_i - x''_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{47}$$

Hieraus folgt:

$$x_i = \frac{x'_i - x''_i}{\sqrt{\varepsilon_1(x'_1 - x''_1)^2 + \varepsilon_2(x'_2 - x''_2)^2 + \varepsilon_3(x'_3 - x''_3)^2}},$$

also nach (44.)

$$\left(\frac{X'X''}{OE_g}\right)^2 = \varepsilon_1(x'_1 - x''_1)^2 + \varepsilon_2(x'_2 - x''_2)^2 + \varepsilon_3(x'_3 - x''_3)^2. \tag{48}$$

Wenn man also als Eichstrecke für eine zu messende Strecke einen ihr parallelen Halbmesser einer durch ihre Gleichung in der affinen Normalform gegebenen Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung verwendet, so enthält der Ausdruck des Streckenverhältnisses nur die Koordinaten der Endpunkte der zu messenden Strecke.

Die Durchmesser, auf denen die Halbmesser liegen, mögen reell sein.

Man kann jede der vier Arten von Mittelpunktsflächen als Eichfläche wählen.

Ist ein imaginäres Ellipsoid Eichfläche, so werden alle Strecken durch imaginäre Halbmesser gemessen, und reellen bzw. imaginären Strecken entsprechen imaginäre bzw. reelle Zahlen.

Beim reellen Ellipsoid werden alle Strecken durch reelle Halbmesser gemessen; zu reellen Strecken gehören also reelle, zu imaginären Strecken imaginäre Zahlenwerte des Streckenverhältnisses.

Beim zweischaligen Hyperboloid dienen als Eichstrecken für Strecken von äußerer bzw. innerer Richtung imaginäre bzw. reelle Halbmesser, und reelle Strecken von äußerer Richtung haben imaginäre, solche von innerer Richtung haben reelle Streckenverhältnisse.

Beim einschaligen Hyperboloid verhält es sich umgekehrt.

Das reelle Ellipsoid wird im allgemeinen die geeignetste Eichfläche sein, wie aus dem Erwähnten schon hervorgeht; dazu kommt noch folgendes: Durch ein Koordinatensystem mit reellen Achsen wird das reelle Ellipsoid vor den anderen Mittelpunktsflächen ausgezeichnet, denn es liegen nicht nur die Einheitspunkte auf ihm, sondern die Einheitsstrecken sind konjugierte Halbmesser der Fläche und sind, wie es ja sein muß, die Einheitsstrecken für die Richtung der Achsen, auf denen sie liegen. Man kann daher das reelle Ellipsoid die Eichfläche des reellen Koordinatensystems nennen[1]).

Und ferner: Bei der Messung einer Strecke durch den ihr parallelen Halbmesser einer Fläche zweiter Ordnung wird allen Strecken, die einer Asymptote parallel sind, die Zahl Null zugeordnet; da der Asymptotenkegel bei den Ellipsoiden imaginär, bei den Hyperboloiden reell ist, sind diese Strecken beim reellen Ellipsoid imaginär, bei den Hyperboloiden aber reell.

Für spezielle Fälle können aber die anderen Flächen besser verwendbar sein, wie sich später zeigen wird.

Wählt man statt eines Hyperboloids das System, bestehend aus dem Hyperboloid und dem zu ihm konjugierten, als Eichgebilde, so kann man wenigstens erreichen, daß allen reellen Strecken reelle Halbmesser, also auch reelle Streckenverhältnisse entsprechen; aber dann muß erst festgesetzt werden, welches Hyperboloid die Eichstrecken für die imaginären Strecken liefern soll.

---

[1]) Ebenso kann man das einschalige, zweischalige Hyperboloid, das imaginäre Ellipsoid als Eichfläche des affinen Koordinatensystems mit bzw. einer, zwei, drei imaginären Achsen bezeichnen.

Aus (48) folgt, wenn h ein Halbmesser einer Mittelpunktsfläche und $\overline{h}$ der auf demselben Durchmesser liegende Halbmesser der konjugierten Fläche ist,

$$\overline{h}^2 = -h^2, \tag{49}$$

denn jede Mittelpunktsfläche kann durch die Gleichung (22) dargestellt und als Eichfläche benutzt werden.

6. Potenz eines Punktes.

Aus (48) ergibt sich, wenn man für X' O, für X'' kurz X setzt,

$$\left(\frac{OX}{OE_g}\right)^2 = \varepsilon_1 x_1{}^2 + \varepsilon_2 x_2{}^2 + \varepsilon_3 x_3{}^2; \tag{50}$$

d. h. in Worten:

Die linke Seite der Normalform der Gleichung jeder Mittelpunktsfläche, für einen beliebigen Punkt X des Raumes gebildet, ist gleich dem Quadrat des Abstands- oder Streckenverhältnisses $OX : OE_g$, wenn E_g einer der Schnittpunkte des Durchmessers OX mit der Fläche ist.

Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 x_1{}^2 + \varepsilon_2 x_2{}^2 + \varepsilon_3 x_3{}^2 - 1 \equiv e(x, x) \\ \varepsilon_1 x_1 x'_1 + \varepsilon_2 x_2 x'_2 + \varepsilon_3 x_3 x'_3 - 1 \equiv e(x, x'). \end{cases} \tag{51}$$

Die Gleichung der Eichfläche ist dann

$$e(x, x) = 0, \tag{52}$$

und es wird

$$\left(\frac{X'X''}{OE_g}\right)^2 = e(x', x') - 2e(x', x'') + e(x'', x''). \tag{53}$$

$$\left(\frac{OX}{OE_g}\right)^2 = e(x, x). \tag{54}$$

Ist X'' ein Punkt der Eichfläche, so wird

$$\left(\frac{X'X''}{OE_g}\right)^2 = e(x', x') - 2e(x', x'');$$

liegen X' und X'' auf ihr, so ist

$$\left(\frac{X'X''}{OE_g}\right)^2 = -2e(x', x'').$$

Ist $\overline{X}$ der Berührungspunkt einer Tangente durch den Punkt X an die Eichfläche, so ergibt sich

$$\left(\frac{X\overline{X}}{OE_g}\right)^2 = e(x, x). \tag{55}$$

In diesem Ausdruck kommen die Koordinaten des Berührungspunktes nicht vor. Nennt man die durch den Punkt X und den Punkt $\overline{X}$ begrenzte Strecke eine Tangentenstrecke von X, so sagt die Gleichung (55), weil man jede Mittelpunktsfläche als Eichfläche ansehen kann:

Bringt man in der Normalform der Gleichung einer Mittelpunktsfläche alle Glieder auf die linke Seite, so ist der entstehende Ausdruck, für einen beliebigen Punkt des Raumes gebildet, gleich dem Quadrat irgendeiner Tangentenstrecke des Punktes, gemessen durch den ihr parallelen Halbmesser der Fläche.

Speziell für reelle Strecken hat man:

Bei einem reellen Ellipsoid verhalten sich irgend zwei Tangentenstrecken eines reellen äußeren Punktes wie die ihnen parallelen Halbmesser.

Beim einschaligen Hyperboloid haben die reellen Tangenten durch einen reellen inneren Punkt, also auch die Eichstrecken, innere Richtung; diese schneiden daher das konjugierte zweischalige Hyperboloid reell; die Tangenten aus einem äußeren Punkte haben äußere Richtung, ebenso ihre Eichstrecken; diese schneiden also das Hyperboloid selbst reell.

Beim zweischaligen Hyperboloid gibt es nur aus äußeren Punkten reelle Tangenten; diese und ihre Eichstrecken haben äußere Richtung, schneiden also das konjugierte einschalige Hyperboloid reell.

Daher hat man die Sätze:

Beim einschaligen Hyperboloid verhalten sich irgend zwei Tangentenstrecken eines inneren Punktes wie die ihnen parallelen Halbmesser des konjugierten zweischaligen Hyperboloids, die eines äußeren Punktes wie die ihnen parallelen Halbmesser der Fläche selbst.

Beim zweischaligen Hyperboloid verhalten sich irgend zwei Tangentenstrecken eines äußeren Punktes wie die ihnen parallelen Halbmesser des konjugierten einschaligen Hyperboloids.

Schneidet eine Gerade g durch einen beliebigen Punkt X des Raumes, die nicht einer Asymptote parallel ist, die Eichfläche in den Punkten X' und X'', so hat man

$$\left(\frac{XX'}{OE_g}\frac{XX''}{OE_g}\right)^2 = [e(x,x) - 2e(x,x')][e(x,x) - 2e(x,x'')].$$

In beiden Streckenverhältnissen sei derselbe Halbmesser gewählt.

Da X, X', X'' auf derselben Geraden liegen, ist

$$x_i = \frac{\lambda' x'_i + \lambda'' x''_i}{\lambda' + \lambda''} \quad (i = 1, 2, 3).$$

$$e(x, x') \equiv e(x', x'')\lambda''(\lambda' + \lambda'')^{-1}.$$

$$e(x, x'') = e(x', x'')\lambda'(\lambda' + \lambda'')^{-1}.$$

$$e(x, x) = 2e(x', x'')\lambda'\lambda''(\lambda' + \lambda'')^{-2}.$$

$$\begin{aligned}&[e(x,x) - 2e(x,x')][e(x,x) - 2e(x,x'')]\\ &= [e(x,x)]^2 - 2e(x,x)[e(x,x') + e(x,x'')] + 4e(x,x')e(x,x''\\ &= [e(x,x)]^2.\end{aligned}$$

$$\left(\frac{XX'}{OE_g}\frac{XX''}{OE_g}\right)^2 = [e(x,x)]^2. \tag{56}$$

$$\frac{XX'}{OE_g}\frac{XX''}{OE_g} = \pm\, e(x, x). \tag{57}$$

Ist g Tangente durch X, so gilt nach (55) in (57) das obere Zeichen. Nun läßt sich g im Strahlenbündel X in jede andere Gerade des Bündels stetig überführen, wenn man die imaginären Strahlen nötigenfalls zu Hilfe nimmt, ohne daß die Gerade irgendwann die Lage einer Geraden des Asymptotenkegels anzunehmen braucht, so daß also $e(x, x)$ niemals Null wird. Dabei ändern sich die Koordinaten von X', X'' und Eg stetig, und das Produkt der beiden Streckenverhältnisse muß immer den Wert $+\,e(x, x)$ haben. Es ist also

$$\frac{XX'}{OE_g}\frac{XX''}{OE_g} = e(x, x). \tag{58}$$

Der Wert dieses Produktes ist für alle Sekanten durch X derselbe; man nennt ihn die Potenz[1]) des Punktes X in bezug auf die Fläche $e(x, x) = 0$. (58) gibt das Resultat:

Die Potenz eines Punktes in bezug auf eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung ist gleich dem Quadrate einer seiner Tangentenstrecken, gemessen durch den ihr parallelen Halbmesser.

Der Potenzbegriff ist hierdurch affin definiert, ohne auf den äquiformen Spezialfall der Kugel beschränkt zu sein, und ohne Rücksicht auf die Realität der betrachteten Gebilde.

Für reelle Punkte ergibt sich:

Die Potenz eines äußeren Punktes in bezug auf ein reelles Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid oder eines beliebigen Punktes in bezug auf ein einschaliges Hyperboloid ist gleich dem Quadrat jeder seiner Tangentenstrecken, gemessen durch den ihr parallelen Halbmesser.

---

[1]) Eine (nicht streng affine) Verallgemeinerung des gewöhnlichen Potenzbegriffes findet sich auch bei J. Neuberg, Théorie des Indices des Points .... in Nouv. Ann. de Math. Sér. II, Tome 9 (1870).

Die Potenz eines inneren Punktes in bezug auf ein reelles Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid oder eines beliebigen Punktes in bezug auf ein einschaliges Hyperboloid ist gleich dem negativen Quadrat der Hälfte einer der Sehnen durch diesen Punkt, die in der Ebene liegen, die zu dem mit dem Punkt inzidierenden Durchmesser konjugiert ist, gemessen durch den ihr parallelen Halbmesser.

Denn die beiden Hälften sind zwei Strecken, wie sie im Potenzbegriff vorkommen; ihre Streckenverhältnisse sind entgegengesetzt gleich.

Sollen alle vorkommenden Strecken reell sein, so kann man sagen:

Beim reellen Ellipsoid und beim einschaligen Hyperboloid ist die Potenz eines äußeren Punktes gleich dem Quadrat des Quotienten aus einer seiner Tangentenstrecken und einem ihr parallelen Halbmesser der Fläche, beim zweischaligen Hyperboloid die eines äußeren, beim einschaligen die eines inneren Punktes gleich dem negativen Quadrat des Quotienten aus einer seiner Tangentenstrecken und einem ihr parallelen Halbmesser der konjugierten Fläche.

Die Potenz eines inneren Punktes ist beim reellen Ellipsoid gleich dem negativen Quadrat der halben Sehne, die in der erwähnten Weise bestimmt wird, dividiert durch das Quadrat eines ihr parallelen Halbmessers, beim zweischaligen Hyperboloid gleich dem negativen Quadrat einer halben derartigen Sehne, dividiert durch das Quadrat eines ihr parallelen Halbmessers der konjugierten Fläche.

(58) läßt sich kürzer so aussprechen:

Bringt man in der Normalform der Gleichung einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung alle Glieder auf die linke Seite, so ist der so entstehende Ausdruck, für einen beliebigen Punkt des Raumes gebildet, gleich der Potenz dieses Punktes in bezug auf die Fläche.

Ist die Fläche durch eine Durchmessergleichung (21) gegeben, so kann man von dieser leicht auf die Normalform (22) übergehen, und dann die Form (58) zurücktransformieren; man erkennt, daß der letzte Satz auch hier gilt; die Potenz des Punktes X ist

$$\varepsilon_1 \frac{x_1^2}{a_1^2} + \varepsilon_2 \frac{x_2^2}{a_2^2} + \varepsilon_3 \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 . \tag{59}$$

Eine Mittelpunktsfläche sei durch ihre allgemeine Gleichung (1) gegeben, so daß also ihr Mittelpunkt im allgemeinen nicht der Koordinaten-Nullpunkt ist. Es sei X ein beliebiger Punkt des Raumes, $\overline{X}$ der Berührungspunkt irgendeiner Tangente aus ihm an die Fläche, g_e der ihr parallele Halbmesser; die Potenz von X ist dann

$$\left(\frac{X\overline{X}}{g_e}\right)^2 .$$

Die Fläche (22), deren Mittelpunkt im Nullpunkt liegt, werde als Eichfläche eingeführt; OE_g sei einer ihrer zu $X\overline{X}$ (und g_e) parallelen Halbmesser.

$$\left(\frac{X\overline{X}}{g_e}\right)^2 = \left(\frac{X\overline{X}}{OE_g}\right)^2 : \left(\frac{g_e}{OE_g}\right)^2 .$$

Nach (48) ist

$$\left(\frac{X\overline{X}}{OE_g}\right)^2 = \varepsilon_1(x_1 - \overline{x}_1)^2 + \varepsilon_2(x_2 - \overline{x}_2)^2 + \varepsilon_3(x_3 - \overline{x}_3)^2 .$$

Die Gerade, auf der der Halbmesser g_e liegt — sie heiße selbst kurz g_e — hat die Richtung von $X\overline{X}$ und geht durch den Mittelpunkt von (1); ihre Schnittpunkte Y mit (1) sollen bestimmt werden. Die Koordinaten von Y können dargestellt werden durch

$$y_i = \lambda(x_i - \overline{x}_i) + \frac{A_{i4}}{A_{44}} \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Zur Bestimmung von λ ist

$$\begin{aligned} 0 = f(y, y) \equiv \lambda^2 f(x_1 - \overline{x}_1, x_2 - \overline{x}_2, x_3 - \overline{x}_3, 1) \\ + 2\lambda f\left(x_1 - \overline{x}_1, x_2 - \overline{x}_2, x_3 - \overline{x}_3, 1 \,\middle|\, \frac{A_{14}}{A_{44}}, \frac{A_{24}}{A_{44}}, \frac{A_{34}}{A_{44}}, 1\right) \\ + f\left(\frac{A_{14}}{A_{44}}, \frac{A_{24}}{A_{44}}, \frac{A_{34}}{A_{44}}, 1\right) . \end{aligned}$$

Nach (36) ist

$$f\left(\frac{A_{14}}{A_{44}}, \frac{A_{24}}{A_{44}}, \frac{A_{34}}{A_{44}}, 1\right) = A_{44}{}^{-1}A.$$

Da ferner

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, 1) = 0,$$
$$f(x_1, x_2, x_3, 1 \mid \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, 1) = 0,$$
$$f(x_1, x_2, x_3, 1 \mid A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) = A,$$
$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, 1 \mid A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) = A$$

ist, erhält man

$$0 = \lambda^2 f(x_1, x_2, x_3, 1) + A A_{44}{}^{-1}.$$

Setzt man vorübergehend

$$f(x_1, x_2, x_3, 1) \equiv f,$$

so ist

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{-A}{A_{44} f}}$$

und folglich

$$y_i = \pm\sqrt{\frac{-A}{A_{44} f}}(x_i - \overline{x}_i) + \frac{A_{i4}}{A_{44}}.$$

Da nun

$$\left(\frac{g_e}{OE_g}\right)^2 = \varepsilon_1\left(\frac{A_{14}}{A_{44}} - y_1\right)^2 + \varepsilon_2\left(\frac{A_{24}}{A_{44}} - y_2\right)^2$$
$$+ \varepsilon_3\left(\frac{A_{34}}{A_{44}} - y_3\right)^2,$$

und

$$\frac{A_{i4}}{A_{44}} - y_i = \mp\sqrt{\frac{-A}{A_{44} f}}(x_i - \overline{x}_i),$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

so folgt

$$\left(\frac{g_e}{OE_g}\right)^2 = \frac{-A}{A_{44} f}[\varepsilon_1(x_1 - \overline{x}_1)^2 + \varepsilon_2(x_2 - \overline{x}_2)^2 + \varepsilon_3(x_3 - \overline{x}_3)^2].$$

$$(60) \qquad \left(\frac{\overline{X}X}{g_e}\right)^2 = \frac{-A_{44}}{A} f(x_1, x_2, x_3, 1).$$

D. h.:

Die Potenz eines Punktes in bezug auf eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung ist gleich der linken Seite ihrer Gleichung in beliebigen affinen Punktkoordinaten, gebildet für diesen Punkt, multipliziert mit der negativen Adjunkte des freien Gliedes in der Determinante der Fläche, dividiert durch diese Determinante selbst.

7. Ein Satz über die Tripel konjugierter Halbmesser.

Es möge nun der folgende Satz[1]) bewiesen werden, der einem Ebenen-Satze entspricht, den L. Heffter und C. Koehler angegeben haben[2]):

Sind l, m, n drei konjugierte Halbmesser einer Mittelpunktsfläche, l', m', n', drei ihnen bzw. parallele Halbmesser einer anderen Mittelpunktsfläche, so ist

$$\left(\frac{l}{l'}\right)^2 + \left(\frac{m}{m'}\right)^2 + \left(\frac{n}{n'}\right)^2$$

konstant.

Die erste Fläche sei durch (22)

$$\varepsilon_1 x_1{}^2 + \varepsilon_2 x_2{}^2 + \varepsilon_3 x_3{}^2 = 1$$

gegeben; die zweite kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit als mit der ersten konzentrisch annehmen; ihre Gleichung sei

$$(61)\quad \begin{cases} h(x, x) \equiv h(x_1, x_2, x_3) \\ \qquad \equiv a_{11} x_1{}^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2{}^2 \\ \qquad\quad + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3{}^2 + 2a_{31} x_3 x_1 = 1. \end{cases}$$

Die Endpunkte von

$$l, m, n; \quad l', m', n'$$

seien bzw.

$$X, Y, Z; \quad X', Y', Z'.$$

---

1) Der von v. Staudt, Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen zweiter Ordnung, Nürnberg 1867, S. 46, gegebene Beweis beruht auf einer Transformation des Polardreikants der drei Durchmesser.

2) H. u. K. I, Art. 157.

Die erste Fläche ist zugleich die Eichfläche, also l eine Eichstrecke von l', also

$$\left(\frac{l'}{l}\right)^2 = \varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2 + \varepsilon_3 x'^2_3;$$

$$\left(\frac{l}{l'}\right)^2 = (\varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2 + \varepsilon_3 x'^2_3)^{-1}.$$

Für $\left(\frac{m}{m'}\right)^2$ und $\left(\frac{n}{n'}\right)^2$ ergeben sich analoge Ausdrücke.

Nun sollen die Koordinaten von X', Y', Z' durch die von X, Y, Z ausgedrückt werden.

Der Durchmesser l' ist darstellbar als

$$\xi_i = \varkappa x'; \quad (i = 1, 2, 3; \ \varkappa \text{ ein variabler Parameter});$$

weil l' parallel zu l ist, und l durch

$$\xi_i = \varrho x_i$$

ausdrückbar ist, ist

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : x_2 : x_3,$$

l' also darstellbar als

$$\xi_i = \sigma x_i.$$

$$1 = h(x', x') = \sigma^2 h(x, x).$$

$$x'^2_i = \frac{x_i^2}{h(x, x)}.$$

$$\left(\frac{l}{l'}\right)^2 = h(x, x)(\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2)^{-1} = h(x, x).$$

$$\left(\frac{m}{m'}\right)^2 = h(y, y).$$

$$\left(\frac{n}{n'}\right)^2 = h(z, z).$$

$$\left(\frac{l}{l'}\right)^2 + \left(\frac{m}{m'}\right)^2 + \left(\frac{n}{n'}\right)^2 = h(x, x) + h(y, y) + h(z, z)$$

$$\begin{aligned} &\equiv a_{11}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + 2a_{12}(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \\ &+ a_{22}(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + 2a_{23}(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3) \\ &+ a_{33}(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) + 2a_{31}(x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1). \end{aligned}$$

Oder nach (26a) und (27)

$$\left(\frac{l}{l'}\right)^2 + \left(\frac{m}{m'}\right)^2 + \left(\frac{n}{n'}\right)^2 = \varepsilon_1 a_{11} + \varepsilon_2 a_{22} + \varepsilon_3 a_{33}, \tag{62}$$

also konstant.

Sind die beiden Flächen nicht konzentrisch, ist daher die zweite durch die Gleichung (1) gegeben, so ist die Konstante

$$\frac{-A_{44}}{A}(\varepsilon_1 a_{11} + \varepsilon_2 a_{22} + \varepsilon_3 a_{33}). \tag{63}$$

Denn denkt man sich (1) durch (6) in (61) tansformiert, was durch Multiplikation mit $\frac{-A_{44}}{A}$ erreicht wird, so folgt (63) aus (62).

Will man sich auf reelle Halbmesser beschränken, so muß man die in (62) vorkommenden imaginären Halbmesser durch reelle ersetzen. Ist z. B. l' imaginär, so ersetzt man nach (49) l'^2 durch $-\bar{l}^2$, wenn $\bar{l}$ der auf demselben Durchmesser liegende reelle Halbmesser der konjugierten Fläche ist. Nennt man diesen dann auch wieder l', so muß man $\left(\frac{l}{l'}\right)^2$ in (66) ein negatives Vorzeichen geben; usw.

Sind also l', m', n' reelle Halbmesser, so müssen diejenigen von ihnen, die nicht auf der ursprünglichen, sondern auf der konjugierten Fläche reelle Schnittpunkte haben, den Faktor $\sqrt{-1}$ erhalten. Es hat also

$$\delta_1 \varepsilon_1 \left(\frac{l}{l'}\right)^2 + \delta_2 \varepsilon_2 \left(\frac{m}{m'}\right)^2 + \delta_3 \varepsilon_3 \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \tag{64}$$

immer denselben Wert, wenn für $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ nach Maßgabe des Verhaltens der Halbmesser l', m', n' $+1$ oder -1 gesetzt wird. Voraussetzung ist dabei, daß die Durchmesser reell sind.

Der behandelte Satz wird meist in der äquiformen Form ausgesprochen[1]:

---

[1]) Z. B. bei G. Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, I. Übers. v. W. Fiedler. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 1898. S. 125.

„Die Summe der Quadrate dreier konjugierter Halbmesser ist konstant“
und auf das reelle Ellipsoid beschränkt.

8. Das Volumenverhältnis.

Der affinen Geometrie gehört auch der Begriff des Verhältnisses zweier Volumina, kurz des Volumenverhältnisses, an.

Hat man vier eigentliche reelle Ebenen, die nicht durch denselben Punkt gehen, so teilen sie den Raum in acht Gebiete (Tetraeder), von denen eines nur eigentliche Punkte enthält. Den von diesem Tetraeder erfüllten Raumteil wollen wir das Volumen dieses Tetraeders nennen.

In der Ebene kann man das Flächenverhältnis zweier Dreiecke mit eigentlichen reellen Seiten, die eine Seite gemein haben, als das Abstandsverhältnis dieser Seite in bezug auf die beiden nicht in ihr liegenden Ecken auffassen. Analog möge das Volumenverhältnis zweier Tetraeder mit einer gemeinsamen Ebene als das Abstandsverhältnis der gemeinsamen Ebene in bezug auf die beiden nicht in ihr liegenden Ecken (oder umgekehrt) definiert werden.

Sind T und T' die Volumina zweier Tetraeder $ABCD$ und $A'BCD$ mit der gemeinsamen Ebene $BCD \equiv a$, so werde also definiert

$$T : T' \equiv ABCD : A'BCD = (AA', a). \tag{65}$$

Durch eine Betrachtung, die der bei H. u. K. I, S. 217 durchgeführten ganz analog ist, kann gezeigt werden, daß diese Definition einen Sinn hat.

Durch die Definition (65), d. h. mit Hilfe des auch für imaginäre Elemente definierten Abstandsverhältnisses, möge das Volumenverhältnis auch für Tetraeder eingeführt werden, die nicht nur reelle Elemente enthalten.

Setzt man die Koordinaten der Punkte A, A' und der Ebene BCD in (41) ein, so erhält man für das Volumenverhältnis zweier Tetraeder $ABCD$ und $A'BCD$ den Ausdruck

$$(66)\qquad ABCD : A'BCD = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Um das Volumenverhältnis von zwei Tetraedern *ABCD* und *KLMN* ohne gemeinsame Seite zu bestimmen, denke man sich eine Reihe von Tetraedern *ABCD*, *EBCD*, ... *JLMN*, *KLMN*, von denen jedes (außer dem ersten) mit dem vorhergehenden drei Ecken, also eine Seite gemein hat, und definiere

$$(67)\qquad \frac{ABCD}{KLMN} = \frac{ABCD}{EBCD} \cdot \ldots \cdot \frac{JLMN}{KLMN}.$$

Daraus folgt:

Der analytische Ausdruck des Volumenverhältnisses zweier Tetraeder *ABCD* und *EFGH* ist

$$(68)\qquad ABCD : EFGH = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & 1 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 1 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Da das Abstandsverhältnis bei affinen Transformationen invariant ist, gilt dasselbe vom Volumenverhältnis zweier Tetraeder.

Wählt man für *EFGH* speziell das Einheitstetraeder, d. h. das Tetraeder mit den Einheitspunkten der x_1-, x_2-, x_3-Achse und dem Nullpunkt des Koordinatensystems in dieser Reihenfolge als Ecken, so erhält man das Volumenverhältnis des Tetraeders *ABCD* schlechthin.

Aus (68) folgt:

Das Volumenverhältnis eines Tetraeders *ABCD* ist

$$(69)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Jeden von Ebenen begrenzten Raumteil kann man in eine Summe von Tetraedern zerlegen, und sein Volumen als

die Summe der Volumina der einzelnen Tetraeder definieren; das Volumen eines von krummen Flächen begrenzten Raumteils kann man durch den Grenzwert einer Summe von Tetraedern erschöpfen.

Bei einer affinen Transformation sind also die Verhältnisse der Volumina von beliebigen räumlichen Gebilden invariant.

9. Einige Sätze über Volumina.

A. Es seien X, Y, Z Endpunkte dreier konjugierter Halbmesser einer Mittelpunktsfläche (22) in dem früher angegebenen Sinne. Das Volumenverhältnis V des Tetraeders $XYZO$ ist

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Da auf jedem der konjugierten Durchmesser zwei Halbmesser liegen, ist das Volumenverhältnis nicht eindeutig bestimmt; daher soll nur sein Quadrat bzw. sein absoluter Wert in Betracht gezogen werden. Es ist

$$(70) \quad \begin{cases} \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 V^2 \\ = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 x_1 & \varepsilon_2 x_2 & \varepsilon_3 x_3 \\ \varepsilon_1 y_1 & \varepsilon_2 y_2 & \varepsilon_3 y_3 \\ \varepsilon_1 z_1 & \varepsilon_2 z_2 & \varepsilon_3 z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2, & \varepsilon_1 x_1 y_1 + \cdots, & \varepsilon_1 x_1 z_1 + \cdots \\ \varepsilon_1 x_1 y_1 + \varepsilon_2 x_2 y_2 + \varepsilon_3 x_3 y_3, & \varepsilon_1 y_1^2 + \cdots, & \varepsilon_1 y_1 z_1 + \cdots \\ \varepsilon_1 x_1 z_1 + \varepsilon_2 x_2 z_2 + \varepsilon_3 x_2 z_3, & \varepsilon_1 y_1 z_1 + \cdots, & \varepsilon_1 z_1^2 + \cdots \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Nach (22) und (13) erhält man

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 V^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$(71\,\mathrm{a}) \qquad V^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Das Quadrat des Volumenverhältnisses ist konstant, das Quadrat des Volumens oder auch das absolut genommene Volumen also ebenfalls.

Man hat also das Resultat[1]):

Alle Tetraeder, die drei konjugierte Halbmesser einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung als Kanten haben, sind absolut genommen inhaltsgleich.

Will man nur reelle Halbmesser berücksichtigen, so kann man sagen:

Alle Tetraeder, welche drei reelle Halbmesser als Kanten haben, die konjugiert sind in bezug auf eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung oder die konjugierte Fläche oder das System zweier konjugierten Flächen, sind absolut genommen inhaltsgleich.

Zum Beweise seien also X, Y, Z jetzt reell. Die Fläche (22) sei

I. ein reelles Ellipsoid. Der Beweis ist genau wie der vorhergehende; wegen

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$$

erhält man

$$V^2 = 1;$$

II. ein imaginäres Ellipsoid.

Man erhält, da X, Y, Z auf dem konjugierten reellen Ellipsoid liegen, nach (70)

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 V^2 = -1$$

$$V^2 = 1; \tag{71b}$$

III. ein einschaliges Hyperboloid.

Liegen etwa X und Y auf ihm, Z also auf dem konjugierten zweischaligen Hyperboloid, so folgt nach (70)

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 V^2 = -1,$$

und wegen

---

1) Vgl. auch v. Staudt, a. a. O., S. 50, wo ein äquiformer Beweis gegeben wird.

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$$

(71c) $$V^2 = 1;$$

IV. ein zweischaliges Hyperboloid.

Auch hier ergibt sich aus (70)

(71d) $$V^2 = 1.$$

Das Einheitstetraeder gehört zu den betrachteten Tetraedern.

Für eine Fläche

(72) $$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 - k^2 = 0$$

ist das Quadrat des Volumenverhältnisses eines der betrachteten Tetraeder

(73) $$V^2 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{k^6}.$$

B. Die inneren Punkte eines reellen Ellipsoids werden durch die Fläche von der uneigentlichen Ebene getrennt; ihre Gesamtheit kann man daher als das Volumen des reellen Ellipsoids bezeichnen.

Es sei F ein reelles Ellipsoid, V sein Volumen, T ein Tetraeder, das drei konjugierte Halbmesser von F als Kanten hat. F' sei ein anderes reelles Ellipsoid mit dem Volumen V'.

Durch eine affine Transformation kann man F in F' überführen; dabei geht V in V' und T in ein Tetraeder T' über, das drei konjugierte Halbmesser von F' als Kanten hat.

Sind π und π' zwei Konstanten, so ist

$$V = \pi T,$$
$$V' = \pi' T'.$$

Ferner ist

$$\frac{V}{V'} = \frac{T}{T'},$$

weil die Transformation affin ist, also

$$\pi' = \pi,$$
$$V = \pi T,$$
$$V' = \pi T'.$$

Da alle derartigen Tetraeder von F einander und alle von F' einander absolut genommen volumengleich sind, hat man:

Das Volumen eines beliebigen reellen Ellipsoides ist gleich dem absolut genommenen Volumen eines der Tetraeder, die drei seiner konjugierten Halbmesser als Kanten besitzen, multipliziert mit einer bestimmten Konstanten.

C. Der von einem reellen Kegel und einer eigentlichen reellen den Kegel elliptisch schneidenden Ebene begrenzte Raumteil, der nur eigentliche Punkte enthält, heiße Kegelabschnitt.

Der Kegel werde mit K, die Ebene mit u bezeichnet.

Ist der Kegel speziell der Asymptotenkegel einer Mittelpunktsfläche, so ist diese ein Hyperboloid, und zwar, wenn die reelle Ebene u eine Tangentialebene an diese Fläche sein soll, ein zweischaliges. Denn nur bei diesem schneidet die Tangentialebene den Asymptotenkegel in einer reellen Ellipse.

Je nachdem bei zwei derartigen Kegelabschnitten die beiden Ellipsen, die von einer den Kegelmantel durchlaufenden Geraden beschrieben werden, denselben oder entgegengesetzten Umlaufssinn zeigen, wenn man sie von der Spitze des Kegels aus über einen Punkt des Inneren des betreffenden Kegelabschnittes ansieht, je nachdem also die die Schnittpunkte der beiden Ellipsen mit einem Kegelstrahl durch die Kegelspitze nicht getrennt oder getrennt werden, möge das Volumenverhältnis der beiden Abschnitte positiv oder negativ sein.

Gegeben sei ein reeller Kegel K (23)

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 0$$

und zwei reelle eigentliche Ebenen u und u', die ihn elliptisch schneidend, die Volumina V und V' von ihm abschneiden, und es sei

$$V^2 = V'^2.$$

u ist sicher Tangentialebene an einem der zweischaligen Hyperboloide (72)

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 - k^2 = 0,$$

die (23) als Asymptotenkegel haben; es sei dies F. T sei ein Tetraeder, das drei konjugierte Halbmesser von F zu Kanten hat.

Durch eine affine Transformation kann man K in sich selbst und u in u' überführen; dabei geht F in irgendein anderes F' der erwähnten Hyperboloide über; u' muß Tangentialebene an F' sein; T geht in ein Tetraeder T' über, das drei konjugierte Halbmesser von F' als Kanten besitzt.

Dabei ist

$$\frac{V}{T} = \frac{V'}{T'},$$

und da

$$V^2 = V'^2$$

ist,

$$T^2 = T'^2.$$

Nun ist nach (73)

$$T^2 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{k^6} E,$$

$$T'^2 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{k'^6} E,$$

wenn E das Einheitstetraeder und $-k'^2$ das freie Glied der Gleichung von F' ist.

Also

$$k^6 = k'^6,$$

oder, da k' reell sein muß,

$$k'^2 = k^2.$$

F' und F sind also identisch.

Sind umgekehrt u und u' zwei Tangentialebenen eines zweischaligen Hyperboloids F mit dem Asymptotenkegel K, die die Volumina V bzw. V' von ihm abschneiden, so kann man auf ähnliche Weise zeigen, daß

$$V^2 = V'^2$$

ist.

Man hat also:

Schneiden zwei Ebenen von einem Kegel absolut gleiche Volumina ab, so berühren sie ein zweischaliges Hyperboloid, das den Kegel als Asymptotenkegel hat.

Die Tangentialebenen eines zweischaligen Hyperboloids schneiden auf seinem Asymptotenkegel absolut gleiche Volumina ab.

Einen äquiformen Beweis für den ersten Teil des Satzes hat H. Schroeter gegeben[1]), der zweite Teil findet sich bei Th. Reye[2]).

D. Die Punkte des Inneren der aus zwei Kegeln bestehenden Figur müssen offenbar für beide Kegel innere Punkte sein; die Kegel haben jedenfalls ein gemeinsames Inneres oder begrenzen ein Volumen, wenn die Spitze jedes von ihnen ein innerer Punkt des anderen ist.

Gegeben seien ein reeller Kegel K_1 und zwei reelle Kegel K_2 und K'_2 mit den Spitzen X und X' im Inneren von K_1, bei denen je eine Mantellinie einer von K_1 parallel ist, die also denselben uneigentlichen Kegelschnitt haben wie K_1. Aus dieser Voraussetzung folgt, daß auch die Spitze von K_1 im Inneren von K_2 und K'_2 liegt. V bzw. V' seien die Volumina, die K_1 und K_2 bzw. K_1 und K'_2 miteinander einschließen.

X liegt sicher auf einem der zweischaligen Hyperboloide, die K_1 als Asymptotenkegel haben; es sei dies F. T sei ein Tetraeder, das drei konjugierte Halbmesser von F als Kanten besitzt.

Es sei

$$V^2 = V'^2.$$

Man kann K_1 affin in sich selbst transformieren und gleichzeitig X in X' überführen. Dadurch geht K_2 in K'_2

---

[1]) Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung. Leipzig 1880. S. 529.

[2]) Geometrie der Lage, II. 3. Aufl. (1892). S. 67, 68.

über, V in V'; X' liegt auf dem aus F hervorgehenden zweischaligen Hyperboloide F', das zu den erwähnten gehört. T wird ein Tetraeder T', das drei konjugierte Halbmesser von F' als Kanten besitzt.

Ferner ist

$$\frac{V}{V'} = \frac{T}{T'},$$

und da

$$V^2 = V'^2,$$

so ist

$$T^2 = T'^2,$$

woraus wie beim ersten Satz in C folgt, daß F' und F miteinander identisch sind.

Ist umgekehrt K_1 der Asymptotenkegel eines zweischaligen Hyperboloids F, und sind K_2 und K'_2 zwei reelle Kegel, deren Spitzen X und X' auf F liegen, und die denselben uneigentlichen Kegelschnitt haben wie K_1, so sind die von K_1 und K_2 bzw. K_1 und K'_2 eingeschlossenen Volumina V und V' absolut genommen gleich, wie leicht aus dem Obigen folgt.

Also hat sich ergeben:

Schließen zwei reelle Kegel mit einem dritten reellen Kegel, mit dem sie denselben uneigentlichen Kegelschnitt gemein haben, absolut gleiche Volumina ein, so liegen ihre Spitzen auf einem zweischaligen Hyperboloide, das den dritten Kegel zum Asymtotenkegel hat.

Alle reellen Kegel, deren Spitzen auf einem zweischaligen Hyperboloid liegen und deren Mantellinien denen des Asymptotenkegels dieses Hyperboloids parallel sind, schließen mit dem Asymptotenkegel absolut gleiche Volumina ein.

III. Parallelmetrische Eigenschaften der Paraboloide.

1. Durchmesser-Tangentengleichung und affine Normalform der Gleichung eines Paraboloids.

Es mögen nun einige parallelmetrische Eigenschaften der Flächen mit uneigentlichem Mittelpunkt, der Paraboloide, behandelt werden.

Da die uneigentliche Ebene Tangentialebene der Fläche ist, kann deren Gleichung in Hesseschen Koordinaten nicht die Form bekommen, in der nur die Quadrate der Koordinaten vorkommen. Man erhält jedoch bekanntlich eine einfache Form, wenn man eine beliebige Tangentialebene als eine Koordinatenebene und den ihr konjugierten Durchmesser als die nicht in ihr liegende Koordinatenachse wählt.

Ist die Gleichung (1) schon auf ein solches System bezogen, und ist die x_3-Achse jener Durchmesser, so ist

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0,$$

und weil die Polarebene des Nullpunktes

$$0 = f_4(x) \equiv a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}t$$

mit der x_1x_2-Ebene identisch ist,

$$a_{41} = a_{42} = a_{44} = 0.$$

Die Gleichung lautet also:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{34}x_3t = 0. \tag{74}$$

Für das Paraboloid (3) als Fläche zweiter Klasse ergibt sich in ähnlicher Weise die Gleichung:

$$A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2 + 2A_{34}u_3s = 0. \tag{75}$$

Sind die u_1- und die u_2-Ebene außerdem noch konjugiert, so ist

$$0 = F(1, 0, 0, 0 \mid 0, 1, 0, 0) \equiv F_1(0, 1, 0, 0) \equiv A_{12}.$$

Für die Gleichung (1) oder (74) folgt dann aus der Determinante von F

$$a_{12} = 0,$$

so daß die Fläche die Gleichungen hat:

$$(76) \qquad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{34}x_3t = 0,$$

$$(77) \qquad A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + 2A_{34}u_3s = 0;$$

sie heißen kurz Durchmesser-Tangentialebenengleichungen oder auch Durchmesser-Tangentengleichungen.

Ist die Gleichung (1) noch nicht eine solche, so bringt man sie zuerst auf die Form (10); aus dieser erhält man, wenn man die Variablen wieder x_1, x_2, x_3, t nennt, schließlich (wenn $a_{22} \neq 0$) die Gleichung:

$$(78) \qquad \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}} x_1^2 + a_{22}x_2^2 + x_3t = 0.$$

In einem ungleichseitigen Koordinatensystem hat man noch die Möglichkeit, diese Gleichung zu vereinfachen, indem man den Einheitspunkt in geeigneter Weise verlegt; geht man noch zu Cartesischen Koordinaten über, so erhält man eine der Formen

$$(79) \qquad \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 = 2\varepsilon_3 x_3.$$

Diese Gleichungsform heißt die affine Normalform der Gleichung eines Paraboloids in Punktkoordinaten.

Die affine Normalform der Paraboloidgleichung in Ebenenkoordinaten erhält man, indem man ihre Koeffizienten mit Hilfe der Determinante A bestimmt; man findet:

$$(80) \qquad \varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 = 2\varepsilon_3 u_3.$$

Das durch (79) oder (80) dargestellte Paraboloid ist elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem ε_1 und ε_2 gleich oder verschieden sind.

Analoge Formen ergeben sich, wenn man die Indices 1 und 3 oder 2 und 3 miteinander vertauscht.

2. Die Paraboloide als Eichflächen.

Ähnlich wie die Mittelpunktsflächen lassen sich die Paraboloide als Eichflächen benutzen. Jede Strecke soll durch diejenige ihr parallele Sehne des Paraboloids gemessen werden, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht, wenn das Paraboloid in der Normalform gegeben ist.

Jeder Strecke von Durchmesser-Richtung wird hierbei die Zahl Null, jeder zur $x_1 x_2$-Ebene parallelen Strecke die Zahl ∞ zugeordnet, jeder anderen eine von Null verschiedene endliche Zahl; weil es in jeder Richtung nur eine Sehne des Paraboloids gibt, ist (abweichend von den Verhältnissen bei den Mittelpunktsflächen) auch das Vorzeichen dieser Zahl bestimmt.

Für das so definierte Streckenverhältnis soll nun ein analytischer Ausdruck gesucht werden.

Die zu messende Strecke sei $X'X''$; man wählt statt der beiden in (48) benutzten Punkte O und E_g hier den Nullpunkt O und den Schnittpunkt E_g der zu $X'X''$ parallelen Sehne des Paraboloids durch O.

Für die Koordinaten x_i von E_g gilt (47) und (79), also

$$x_i = \lambda(x'_i - x''_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

und

$$\varepsilon_1 x_1{}^2 + \varepsilon_2 x_2{}^2 = 2\varepsilon_3 x_3 ,$$

aus denen folgt:

$$\lambda = \frac{2\varepsilon_3(x'_3 - x''_3)}{\varepsilon_1(x'_1 - x''_1)^2 + \varepsilon_2(x'_2 - x''_2)^2}.$$

Nach (44) und dem obigen Werte der x_i ist aber

$$\frac{X'X''}{OE_g} = \frac{x'_i - x''_i}{-\lambda(x'_i - x''_i)} = -\frac{1}{\lambda},$$

also

$$\frac{X'X''}{OE_g} = \frac{\varepsilon_1(x''_1 - x'_1)^2 + \varepsilon_2(x''_2 - x'_2)^2}{2\varepsilon_3(x''_3 - x'_3)}. \tag{81}$$

Die Wahl der Eichstrecke OE_g hat sich also dadurch gerechtfertigt, daß das Streckenverhältnis nur die Koordinaten der Endpunkte der zu messenden Strecke enthält.

Die Eichstrecken sind sämtlich reell.

3. Analogien zu den Potenzsätzen der Mittelpunktsflächen.

Aus (81) folgt speziell

$$\frac{OX}{OE_g} = \frac{\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2}{2\varepsilon_3 x_3}. \tag{82}$$

Das gibt, da man jedes Paraboloid zur Eichfläche machen kann, den Satz:

Die linke Seite der Normalform der Gleichung eines Paraboloids, durch die rechte dividiert, ist — für einen beliebigen Punkt X des Raumes gebildet — gleich dem Streckenverhältnis $OX : E_g$, wenn O der als Nullpunkt gewählte Flächenpunkt und E_g der Schnittpunkt des Radius vektor OX mit der Fläche ist.

Ist X'' ein Punkt der Eichfläche, so ist

$$\frac{X'X''}{OE_g} = \frac{\varepsilon_1(x''_1 - x'_1)^2 + \varepsilon_2(x''_2 - x'_2)^2}{\varepsilon_1 x''^2_1 + \varepsilon_2 x''^2_2 - 2\varepsilon_3 x'_3};$$

sind X' und X'' Punkte der Eichfläche, so ist

$$\frac{X'X''}{OE_g} = \frac{\varepsilon_1(x''_1 - x'_1)^2 + \varepsilon_2(x''_2 - x'_2)^2}{\varepsilon_1 x''^2_1 + \varepsilon_2 x''^2_2 - (\varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2)};$$

in diesem Ausdruck kommen die Koordinaten x'_3 und x''_3 nicht vor; sind X' und X'' konjugierte Punkte in bezug auf die Eichfläche, so wird

$$\frac{X'X''}{OE_g} = \frac{\varepsilon_1 x''^2_1 + \varepsilon_2 x''^2_2 + \varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2 - 2\varepsilon_3(x'_3 + x''_3)}{2\varepsilon_3(x''_3 - x'_3)}.$$

Ist $\bar{X}$ der Berührungspunkt einer Tangente aus X an die Fläche, so ist

$$
(83)\quad \begin{cases} \dfrac{X\overline{X}}{OE_g} = \dfrac{\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 - 2\varepsilon_3 x_3}{2\varepsilon_3(\overline{x}_3 - x_3)} \\ \qquad = \dfrac{\varepsilon_1(\overline{x}_1 - x_1)^2 + \varepsilon_2(\overline{x}_2 - x_2)^2}{2(\varepsilon_1 \overline{x}_1^2 + \varepsilon_2 \overline{x}_2^2 - \varepsilon_1 x_1 \overline{x}_1 - \varepsilon_2 x_2 \overline{x}_2)}. \end{cases}
$$

In dem ersten Ausdrucke kommt von den Koordinaten des Berührungspunktes nur $\overline{x}_3$ vor, im zweiten kommen x_3 und $\overline{x}_3$ nicht vor. Setzt man im zweiten Ausdruck $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, ist also X ein Punkt eines Durchmessers, so erhält man den bekannten Satz:

Ist X ein Punkt eines Durchmessers, $\overline{X}$ der Berührungspunkt einer durch ihn gehenden Tangente des Paraboloids, so verhält sich die Tangentenstrecke $X\overline{X}$ des Punktes X zu derjenigen ihr parallelen Sehne des Paraboloids, die durch den Schnitt des Durchmessers mit der Fläche geht, wie 1 : 2.

Es sei X ein Punkt des Durchmessers

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

g eine Gerade durch X, die das Paraboloid in X' und X'' schneiden möge. Nach (81) ist

$$\frac{XX'}{OE_g} = \frac{\varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2}{2\varepsilon_3(x'_3 - x_3)},$$

$$\frac{XX''}{OE_g} = \frac{\varepsilon_1 x''^2_1 + \varepsilon_2 x''^2_2}{2\varepsilon_3(x''_3 - x_3)},$$

also

$$
(84)\quad \frac{XX'}{OE_g}\,\frac{XX''}{OE_g} = \frac{(\varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2)(\varepsilon_1 x''^2_1 + \varepsilon_2 x''^2_2)}{4(x'_3 - x_3)(x''_3 - x_3)}.
$$

Dieses Produkt habe für einen gewissen Punkt X' (durch den X'' mit bestimmt ist) den Wert c; es soll untersucht werden, für welche Punkte X' und X'' es denselben Wert hat.

$$(85)\qquad \frac{(\varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2)(\varepsilon_1 x''^2_1 + \varepsilon_2 x''^2_2)}{4(x'_3 - x_3)(x''_3 - x_3)} = c.$$

$$(\varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2)(\varepsilon_1 x''^2_1 + \varepsilon_2 x''^2_2) = 4c(x'_3 - x_3)(x''_3 - x_3).$$

Für X' bzw. X'' gilt

$$\varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2 = 2\varepsilon_3 x'_3$$

bzw.

$$\varepsilon_1 x''^2_1 + \varepsilon_2 x''^2_2 = 2\varepsilon_3 x''_3;$$

die Gleichung (85) wird also

$$x'_3 x''_3 = c(x'_3 - x_3)(x''_3 - x_3).$$

Weil X, X' und X'' auf einer Geraden liegen, ist

$$x''_1 = \frac{x'_1}{\lambda'' + 1},$$

$$x''_2 = \frac{x'_2}{\lambda'' + 1},$$

$$x''_3 = \frac{\lambda'' x_3 + x'_3}{\lambda'' + 1};$$

dabei ist mit λ'' derjenige Wert des variablen Parameters λ bezeichnet worden, der zum Punkte X'' gehört. Die Einsetzung dieser Werte x''_i ergibt:

$$x'_3 \frac{\lambda'' x_3 + x'_3}{\lambda'' + 1} = c(x'_3 - x_3)\left(\frac{\lambda'' x_3 + x'_3}{\lambda'' + 1} - x_3\right),$$

oder

$$x'_3(\lambda'' x_3 + x'_3) = c(x'_3 - x_3)(x'_3 - x_3) = c(x'_3 - x_3)^2,$$

oder endlich

$$(86)\qquad x'^2_3(c-1) - x'_3 x_3(2c + \lambda'') + c x_3^2 = 0.$$

Die Punkte X' liegen also auf einer Fläche zweiter Ordnung, die in ein zur x_1x_2-Ebene paralleles Ebenenpaar entartet ist. Wegen der Symmetrie von (85) in den x'_i und x''_i gilt aber dasselbe auch für X''. Der Endpunkt X'' der Sehne $X'X''$ liegt offenbar immer auf der einen dieser Ebenen, wenn der andere X' auf der anderen liegt. Da diese Ebenen das Paraboloid in Kegelschnitten schneiden,

so liegen die Sehnen $X'X''$ zugleich auf einem Kegel zweiter Ordnung, der X zur Spitze hat. Man hat also das Resultat:

Schneidet der durch einen beliebigen Raumpunkt X gehende Durchmesser eines Paraboloids dieses in O, und benutzt man die durch O gehenden Sehnen der Fläche als Einheitsstrecken für die ihnen parallelen Geraden, sind ferner X' und X'' die Flächenpunkte auf einer beliebigen Geraden durch X, so hat das Produkt der Strecken XX' und XX'' (gemessen durch die zugehörige Einheitsstrecke) denselben Wert für alle Geraden, deren Schnittpunkte X' (und folglich auch X'') auf zwei Ebenen liegen, die der Polarebene von X parallel sind.

Die Geraden selbst sind die Erzeugenden eines Kegels zweiter Ordnung mit X als Spitze und der Schnittkurve einer der Ebenen mit dem Paraboloid als Leitkurve.

4. Zwei Sätze über Volumina.

A. Es sei ein Paraboloid (79) gegeben

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 = 2\varepsilon_3 x_3 .$$

Der Durchmesser

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

d. h. die x_3-Achse, schneidet die Fläche in O; ferner sei P ein Punkt auf demselben Durchmesser, und es sei, wenn E_3 der Einheitspunkt auf der x_3-Achse ist,

$$\frac{OP}{OE_3} = \pm p. \tag{87}$$

P hat also die Koordinaten

$$0, 0, \pm p.$$

Die zur x_3-Achse konjugierte Ebene u durch P ist

$$x_3 = \pm p;$$

ihre Schnittkurve mit dem Paraboloid hat also die Gleichung

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 \mp 2\varepsilon_3 p = 0. \tag{88}$$

Für die Endpunkte Y und Z zweier konjugierten Halbmesser dieser Kurve ist

$$\varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 \mp 2\varepsilon_3 p = 0,$$
$$\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 \mp 2\varepsilon_3 p = 0,$$

außerdem aber[1])

$$\varepsilon_1 y_1 z_1 + \varepsilon_2 y_2 z_2 = 0 \tag{89}$$

und

$$\begin{cases} \varepsilon_1 z_1^2 = \varepsilon_2 y_2^2 \\ \varepsilon_1 y_1^2 = \varepsilon_2 z_2^2. \end{cases} \tag{90}$$

Das Volumenverhältnis V von $OPYZ$ ist demnach

$$V = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm p & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \mp p \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Da Z durch Y nicht eindeutig bestimmt ist (auch bei bestimmtem p und P), werde V^2 betrachtet.

$$\varepsilon_2 \frac{V^2}{p^2} = \varepsilon_2 y_1^2 z_2^2 - 2\varepsilon_2 y_1 y_2 z_1 z_2 + \varepsilon_2 y_2^2 z_1^2,$$

und wegen (89)

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{V^2}{p^2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 y_1^2 z_2^2 + 2\varepsilon_1^2 y_1^2 z_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^2 z_1^2;$$

oder nach (90)

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{V^2}{p^2} = \varepsilon_1 y_1^4 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_1^2 y_2^2 + \varepsilon_2^2 y_2^4 = (\varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2)^2 = 4p^2.$$

$$V^2 = 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 p^4. \tag{91}$$

V^2 hängt also nur von p ab, nicht von der speziellen Wahl von Y und Z. Ebensowenig aber von dem speziellen hier benutzten Durchmesser, da man jeden solchen zur x_3-Achse machen kann. Zwei Tetraeder der betrachteten Art sind also absolut genommen inhaltsgleich, wenn die auf

[1]) Vgl. H. u. K. I, S. 364, (31) u. (32).

den Durchmessern zwischen der Ebene und dem Paraboloid abgeschnittenen Strecken absolut genommen gleich sind. Man hat also:

Legt man durch einen Punkt jedes beliebigen Durchmessers eines Paraboloids eine zu dem Durchmesser konjugierte Ebene, so sind die Tetraeder, die irgend zwei konjugierte Halbmesser der Schnittkurve der Ebene mit dem Paraboloid und die von dem Punkte und dem Schnittpunkt des Durchmessers mit dem Paraboloid begrenzte Strecke als Kanten haben, absolut gleich, sobald diese Strecken absolut gleich sind.

B. Ist das Paraboloid elliptisch und die im vorigen Satze benutzte Ebene reell, so schließen sie ein Volumen ein, wenn die Ebene die Fläche reell schneidet und keine Diametralebene ist.

Es sei gegeben ein elliptisches Paraboloid F, einer seiner Durchmesser d durch den Flächenpunkt A, ein reeller Punkt P auf d, und eine zu d konjugierte Ebene u durch P; es sei $\frac{PA}{OE_3} = p$. Das von F und u eingeschlossene Volumen sei V. Ferner sei T ein Tetraeder $ABYZ$, wo Y und Z zwei beliebige Punkte des Paraboloids auf konjugierten Durchmessern der Schnittkurve von u und F sind.

Durch eine affine Transformation kann man F in sich selbst und A in einen beliebigen Punkt A' von F überführen; dabei wird d in einen Durchmesser d' durch A', P in einen Punkt P' auf d', für den $\frac{P'A'}{OE_3} = p$ ist, u in eine Ebene u' durch P', die zu d' konjugiert ist, V in das von u' und F eingeschlossene Volumen V' und endlich T in ein Tetraeder $T' \equiv A'P'Y'Z'$ übergeführt, wobei Y' und Z' Punkte von F auf zwei konjugierten Durchmessern des Schnittes von F mit u' sind.

Nach dem vorigen Satze ist $T = \pm T'$, und da

$$\frac{V}{V'} = \frac{T}{T'}$$

ist, so ist

$$V = \pm V'.$$

D. h.:

Legt man durch einen Punkt auf jedem der Durchmesser eines elliptischen Paraboloids eine zu dem Durchmesser konjugierte Ebene, so haben die entstehenden Segmente des Paraboloids absolut gleiche Volumina, wenn die von diesem Punkt und dem Schnittpunkt des Durchmessers mit der Fläche begrenzten Strecken gleich sind.



Lebenslauf.

Nachdem ich, Cesar Berthold Walther Koch, geboren am 29. März 1886 in Hamburg, von Ostern 1896 an das Matthias Claudius-Gymnasium in Wandsbek besucht und dort Ostern 1905 die Reifeprüfung bestanden hatte, bezog ich die Universität, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren. Ich verweilte zunächst drei Semester in Jena, darauf zwei in Berlin und endlich vier Semester in Kiel. Meine akademischen Lehrer waren die Herren Blasius, Heffter, Kobold, Landsberg, Martius, Pochhammer, Riehl, Schwarz, Thomae, L. Weber, Weinnoldt, Winkelmann. Von Michaelis 1909 an bereitete ich mich im Elternhause auf die Doktorprüfung vor, die ich am 7. Mai 1910 in Kiel bestand.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle Herrn Professor Heffter für die Anregung und Förderung, die er mir hat zuteil werden lassen, verbindlichsten Dank zu sagen.





